

ANALIZA MATEMATYCZNA MATERIAŁÓW NIELINIOWYCH

LEADER PROJEKTU: PROF. DR HAB. JAROSŁAW MEDERSKI

Projekt badawczy koncentruje się na nieliniowych równaniach różniczkowych cząstkowych pojawiających się w elektromagnetyzmie, nieliniowej optyce oraz nauce o materiałach. Badamy zagadnienia związane z operatorem Schrödingera, operatorem rotacji (curl) oraz innymi eliptycznymi i ewolucyjnymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi (PDE). Głównym tematem jest analiza równań Maxwella z nieliniową polaryzacją, które opisują zjawiska istotne w fizyce i inżynierii. Nieliniowe ośrodki, takie jak materiały typu Kerra, odgrywają kluczową rolę w nanotechnologii, umożliwiając projektowanie struktur mniejszych niż długość fali światła. Materiały te wykazują nowe właściwości optyczne, które nie mogą być uchwycone przez modele liniowe.

Celem projektu jest zbadanie fal elektromagnetycznych o czasie harmonicznym w nieliniowych ośrodkach za pomocą metod analitycznych. Techniki te są stosunkowo nowe w kontekście nieliniowych równań typu curl-curl i spodziewamy się opracowania nowych metod matematycznych. Skupiamy się na istnieniu rozwiązań podstawowych i związanych dla równań semiliniowych z różnymi operatorami eliptycznymi. Pozwala to modelować propagację światła w metamateriałach, których odpowiedź zależy od natężenia pola. Nieliniowe równania Maxwella są również istotne przy opisie materiałów takich jak grafen czy izolatory topologiczne poddane silnym polom elektromagnetycznym. Kolejnym ważnym celem jest ścisła analiza modeli nielokalnych, takich jak te z ułamkowym operatorem Laplace'a (operator ułamkowy) lub operatorami Waldenfelsa, które lepiej odzwierciedlają rzeczywiste zjawiska niż klasyczne modele lokalne. Modele te są intensywnie badane w fizyce, biologii i ekonomii. Zajmujemy się również problemami nieklasycznymi z danymi osobliwymi, np. w niegładkich dziedzinach, z danymi miarowymi lub przy słabych założeniach regularności.

Wreszcie, badamy ewolucję czasową zaawansowanych materiałów, uwzględniając deformacje, dyfuzję, reakcje chemiczne oraz dynamiczne zachowanie biomateriałów. Modelowanie matematyczne odgrywa tu kluczową rolę – pozwala analizować stabilność struktur, procesy adaptacji, samoorganizację oraz istnienie trajektorii spełniających złożone warunki brzegowe. Aby skutecznie opisywać te zjawiska, wykorzystamy nowoczesne metody redukcji wymiarów, które łączą zaawansowaną analizę równań Maxwella z uproszczonymi modelami numerycznymi. Skupimy się również na technikach regularyzacyjnych, takich jak lasso, wywodzących się z uczenia maszynowego i statystyki. Metody te pozwalają ograniczyć złożoność modeli, uniknąć przeuczenia oraz wyodrębnić najistotniejsze zależności fizyczne, co jest szczególnie istotne przy analizie złożonych układów materiałowych.

Zadania badawcze znajdują się na pograniczu takich dziedzin jak: metody wariacyjne i topologiczne, równania różniczkowe, analiza funkcjonalna, analiza harmoniczna, statystyka, uczenie maszynowe i fizyka matematyczna. Potencjalni współpracownicy w projekcie mają różnorodne doświadczenie matematyczne – zajmują się nieliniowymi równaniami, ale często stosują odmienne podejścia i narzędzia. Projekt stwarza szansę na połączenie sił i współpracę badaczy, którzy dotąd działali niezależnie. Potencjalne zastosowania spodziewanych wyników mogą przyczynić się do lepszego zrozumienia modeli fizycznych, np. w nieliniowej optyce, materiałach nieliniowych, biomateriałach, oraz do opracowania bardziej efektywnych metod numerycznych dla równań nieliniowych. Oczekiwanym efektem projektu jest wykazanie istnienia rozwiązań badanych problemów oraz opracowanie nowych metod matematycznych, które mogą znaleźć zastosowanie także w innych dziedzinach fizyki matematycznej.